O. Belova

About torsion of Neifeld's connection analog in the space of centred planes

Space *П* of centred *m*-planes is considered in the projective space P_n. Principal fiber bundle is arised above it. Analog of Neifeld's connection is given in this fibering. The torsion object of Neifeld's connection is introduced. It is shown, that this object is a tensor.

Key words: projective space, space of centred planes, Neifeld's connection, torsion object.

УДК 514.76

А. В. Букушева, С. В. Галаев
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
bukusheva@list.ru, sgalaev@mail.ru

Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий

Исследуется геометрия почти контактного гиперкомплексного и почти контактного гиперкэлерова многообразий. Определяется внутренняя связность Обаты ∇, сохраняющая почти контактную гиперкомплексную структуру. Доказывается, что почти контактное гиперкэлерово многообразие является η-Эйнштейновым многообразием.

Ключевые слова: почти контактное гиперкэлерово многообразие, η-Эйнштейново многообразие.

1. Введение. Основным примером почти контактной гиперкэлеровой структуры является продолженная структура [1—3], естественным образом определяемая на распределении D нулевой кривизны сасакиева многообразия M [2]. Идея построения продолженной почти контактной структуры основана на использовании аналогии между геометрией [4] касательного расслоения риманова многообразия и геометрией распределения D почти контактной метрической структуры $\left(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g,D\right)$. В работе определяется внутренняя связность Обаты. Показывается, что внутренняя связность Обаты сохраняет почти контактную гиперкомплексную структуру и имеет нулевое кручение. Определяется тензор Схоутена — Риччи и доказывается, что почти контактное гиперкэлерово многообразие является η-Эйнштейновым многообразием.

2. Почти контактные гиперкомплексные и почти контактные гиперкэлеровы многообразия. Почти контактным многообразием называется гладкое многообразие M нечетной размерности $n=2m+1$ с заданной на нем почти контактной структурой $\left(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,D\right)$. Тензорные поля $\vec{\xi}$, η, φ связаны соотношениями $\varphi^2=-I+\eta\otimes\vec{\xi}$, $\eta\left(\vec{\xi}\right)=1$, $d\eta\left(\vec{\xi},\cdot\right)=0$. Распределение $D=\ker\eta=im\varphi$ называется распределением почти контактном структуры. Векторное поле $\vec{\xi}$ называется векторным полем Риба. Тензорное поле t, заданное на почти контактном многообразии, назовем допустимым (к распределению D), если $t\left(\vec{\xi},\cdot\right)=t\left(\eta,\cdot\right)=0$. Почти контактная структура называется нормальной, если выполняется условие $N_\varphi+2d\eta\otimes\vec{\xi}=0$, где

$$N_\varphi\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\left[\varphi\vec{x},\varphi\vec{y}\right]+\varphi^2\left[\vec{x},\vec{y}\right]-\varphi\left[\varphi\vec{x},\vec{y}\right]-\varphi\left[\vec{x},\varphi\vec{y}\right]$$

— тензор Нейенхейса эндоморфизма φ. Если эндоморфизм φ удовлетворяет более слабому условию $N_\varphi+2(d\eta\circ\varphi)\otimes\vec{\xi}=0$, то соответствующую почти контактную структуру будем называть почти нормальной структурой, а сам эндоморфизм — интегрируемой допустимой почти комплексной структурой. Гладкое распределение $D^{\perp} = Span\left(\vec{\xi}\right)$ называется оснащением распределения D. Имеет место разложение $TM = D \oplus D^{\perp}$.

Предложение 1. *Для многообразия с почти контактной структурой выполняется равенство*

$$P\left(N_{\varphi}(\vec{x},\vec{y})\right) = N_{\varphi}(\vec{x},\vec{y}) + 2d\eta(\varphi\vec{x},\varphi\vec{y})\vec{\xi}, \ \ \vec{x},\vec{y} \in \Gamma\left(TM\right).$$

В дальнейшем будем использовать следующее обозначение: $\tilde{N}_{\varphi} = N_{\varphi} + 2(d\eta \circ \varphi) \otimes \vec{\xi}$.

Гиперкомплексная структура на гладком многообразии M представляет собой тройку интегрируемых почти комплексных структур *(I,J,K),* удовлетворяющих соотношению $IJ = -JI = K$. При этом M называется гиперкомплексным многообразием. Одним из первых гиперкомплексные структуры рассматривал Обата [5]. Почти контактное многообразие M размерности $n = 4m + 1$ назовем почти контактным гиперкомплексным многообразием, если на нем дополнительно заданы допустимые интегрируемые почти комплексные структуры φ_1, φ_2 такие, что: $\varphi_1\varphi_2 = -\varphi_2\varphi_1 = \varphi$. Почти контактное многообразие M называется почти контактным метрическим многообразием, если M — риманово многообразие с метрическим тензором g, удовлетворяющим условию $g(\varphi\vec{x},\varphi\vec{y}) = g(\vec{x},\vec{y}) - \eta(\vec{x})\eta(\vec{y})$. Нормальное почти контактное метрическое многообразие называется многообразием Сасаки, если $\Omega = d\eta$, где $\Omega(\vec{x},\vec{y}) = g(\vec{x},\varphi\vec{y})$ — фундаментальная форма структуры. Если почти контактное гиперкомплексное многообразие M является почти контактным метрическим многообразием и при этом выполняется условие $g(\varphi_i\vec{x},\varphi_i\vec{y}) = g(\vec{x},\vec{y}) - \eta(\vec{x})\eta(\vec{y})$, то M назовем почти контактным гиперэрмитовым многообразием. Если, при этом, дифференциальные формы $\Omega_i(\vec{x},\vec{y}) = g(\vec{x},\varphi_i\vec{y})$,

$\Omega(\vec{x},\vec{y}) = g(\vec{x},\varphi\vec{y})$ замкнуты, то соответствующее почти контактное гиперэрмитово многообразие будем называть почти контактным гиперкэлеровым многообразием. Карту $K(x^{\alpha})$ (α, β, γ = 1,..., n; a, b, c = 1,..., n – 1) будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_n = \vec{\xi}$. Пусть P: $TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^{\perp}$, и $K(x^{\alpha})$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение D: $D = Span(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии M неголономное поле базисов $(\vec{e}_{\alpha}) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a, \eta = \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$, где $\omega = d\eta$. Адаптированным будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$, как базис, определяемый адаптированной картой. Условие $d\eta(\vec{\xi},\cdot) = 0$ влечет справедливость равенства $\partial_n \Gamma_a^n = 0$.

3. Основные результаты. Внутренней линейной связностью ∇ [3] на многообразии с почти контактной метрической структурой называется отображение $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\nabla_{f_1\vec{x} + f_2\vec{y}} = f_1 \nabla_{\vec{x}} + f_2 \nabla_{\vec{y}}$,

2) $\nabla_{\vec{x}} f\vec{y} = (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y}$,

3) $\nabla_{\vec{x}}(\vec{y} + \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z}$,

где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей. Кручением и кривизной внутренней связности назовем допустимые [3] тензорные поля

$$S(\vec{x},\vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x},\vec{y}],$$

$$R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}=\nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z}-\nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z}-\nabla_{P[\vec{x},\vec{y}]}\vec{z}-P\left[Q[\vec{x},\vec{y}],\vec{z}\right],$$

$\vec{x},\vec{y}\in\Gamma(D)$, где $P\colon TM\to D$ — проектор, определяемый разложением $TM=D\oplus D^{\perp}$, $Q=I-P$. Тензор $R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$ назван Вагнером тензором кривизны Схоутена. Ассоциированную с внутренней связностью ∇ связность ∇^{A} определим как единственную связность на многообразии M, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $\nabla^{A}_{\vec{x}}\vec{y}\in\Gamma(D)$,

2) $\nabla^{A}_{\vec{x}}\vec{\xi}=\vec{0}$,

3) $\nabla^{A}_{\vec{x}}\vec{y}=[\vec{\xi},\vec{y}]$,

4) $\nabla^{A}_{\vec{x}}\vec{z}=\nabla_{\vec{y}}\vec{z}$, $\vec{x}\in\Gamma(TM)$, $\vec{y},\vec{z}\in\Gamma(D)$.

Корректность определения ассоциированной связности подтверждается следующим предложением.

Предложение 2 [3]. *На почти контактном многообразии M с заданной на нем внутренней связностью ∇, существует и притом единственная связность ∇^{A}, удовлетворяющая условиям 1) — 4).*

Предложение 3. *Тензор кривизны K ассоциированной связности связан с тензором кривизны Схоутена с помощью следующего равенства:*

$$K(\vec{x},\vec{y})\vec{z}=R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}+\eta(\vec{x})P(\vec{y},\vec{z})-\eta(\vec{y})P(\vec{x},\vec{z}).$$

Здесь $P(\vec{x},\vec{y})$ — допустимое тензорное поле с компонентами $P^{a}_{bc}=\partial_{n}\Gamma^{a}_{bc}$.

Теорема 1 [3]. *Допустимая почти комплексная структура φ интегрируема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: $\nabla^{A}\varphi=0$, где ∇^{A} — связность, ассоциированная с некоторой внутренней симметричной связностью ∇.*

По аналогии с канонической связностью гиперкомплексного многообразия [6], определим на многообразии с почти контактной гиперкомплексной структурой внутреннюю связность ∇, полагая:

$$\nabla_{\vec{x}}\vec{y} = \frac{1}{2}\left(P[\vec{x},\vec{y}] + \varphi_1[\varphi_1\vec{x},\vec{y}] - \varphi_2[\vec{x},\varphi_2\vec{y}] + \varphi[\varphi_1\vec{x},\varphi_2\vec{y}]\right).$$

Назовем полученную выше связность внутренней связностью Обаты.

Предложение 4. *Внутренняя связность Обаты сохраняет почти контактную гиперкомплексную структуру и имеет нулевое кручение.*

Доказательство. Воспользовавшись формулой $\left(\nabla_{\vec{x}}\varphi_1\right)\vec{y} = \nabla_{\vec{x}}\left(\varphi_1\vec{y}\right) - \varphi_1\left(\nabla_{\vec{x}}\vec{y}\right)$, получаем:

$$2\left(\nabla_{\vec{x}}\varphi_1\right)\vec{y} = \varphi_1\tilde{N}_{\varphi_1}(\vec{x},\vec{y}) - \varphi\tilde{N}_{\varphi_1}(\vec{x},\varphi_2\vec{y}).$$

Учитывая предложение 1, заключаем, что $\nabla_{\vec{x}}\varphi_1 = 0$. Справедливость равенства $\nabla_{\vec{x}}\varphi_2 = 0$ проверяется непосредственно. Кручение внутренней связности Обаты представимо в виде

$$2S(\vec{x},\vec{y}) = \tilde{N}_{\varphi_2}(\vec{x},\vec{y}) - \tilde{N}_{\varphi_1}(\vec{x},\vec{y}) - \tilde{N}_{\varphi}(\varphi_1\vec{x},\varphi_1\vec{y}).$$

Тем самым предложение доказано.

Внутренняя линейная связность может быть определена заданием горизонтального распределения над пространством векторного расслоения (D,π,M). Будем говорить, что над распределением D задана связность, если распределение $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi: D \to M$ — естественная проекция, раскладывается в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D. Введем на D структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ многообразия M сверхкарту $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+a})$ на многообразии D, где (x^{n+a}) —

координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$. Построенную сверхкарту также будем называть адаптированной. Задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта $G_b^a\left(x^\alpha, x^{n+a}\right)$ такого, что $HD = span\left(\vec{\varepsilon}_a\right)$, где

$$\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}.$$

В случае, когда

$$G_b^a\left(x^\alpha, x^{n+a}\right) = \Gamma_{bc}^a\left(x^\alpha\right) x^{n+c},$$

связность над распределением определяется внутренней линейной связностью. Пусть ∇ — внутренняя линейная связность, определяемая горизонтальным распределением *HD*, и $N : D \to D$ — поле допустимого тензора типа (1,1). Продолженной связностью назовем связность в векторном расслоении (D, π, M), определяемую разложением $TD = \tilde{H}\tilde{D} \oplus VD$, такую, что $\tilde{H}\tilde{D} = HD \oplus Span\left(\vec{u}\right)$, где $\vec{u} = \partial_n$.

Всякому векторному полю $\vec{x} \in \Gamma(TM)$, заданному на многообразии M, обычным образом соответствует его горизонтальный лифт $\vec{x}^h$, при этом $\vec{x}^h \in \Gamma(HD)$ тогда и только тогда, когда $\vec{x}$ — допустимое векторное поле: $\vec{x} \in \Gamma(D)$. Векторные поля $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \vec{u} = \partial_n, \partial_{n+a})$ определяют на *D* неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы

$$(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+c} dx^b)$$

— соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b\right] = 2\omega_{ba}\partial_n + x^{n+d} R_{bad}^c \partial_{n+c},$$

$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \partial_n\right] = x^{n+d} \partial_n \Gamma_{ad}^c \partial_{n+c},$$

$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}\right] = \Gamma_{ab}^c \partial_{n+c}.$$

Объект $P^c_{ad} = \partial_n \Gamma^c_{ad}$ не зависит от выбора адаптированной системы координат и представляет собой допустимое тензорное поле $P(\vec{x},\vec{y}),\ \vec{x},\vec{y} \in \Gamma(D)$ типа (2,1).

Теорема 2 [3]. *Пусть* ∇ *— внутренняя симметричная связность с тензором кривизны Схоутена* $R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$. *Тогда для всех* $\vec{x},\vec{y} \in \Gamma(D)$ *и* $\vec{p} \in D$ *имеют место следующие равенства*

$$[\vec{x}^h, \vec{y}^h]_{\vec{p}} = [\vec{x},\vec{y}]^h - \left\{R(\vec{x},\vec{y})\vec{p}\right\}^v,$$

$$[\vec{x}^h, \vec{\xi}^h]_{\vec{p}} = [\vec{x},\vec{\xi}]^h - \left\{P(\vec{x},\vec{p})\right\}^v,\ [\vec{x}^h, \vec{y}^v] = (\nabla_{\vec{x}}\vec{y})^v,$$

$$[\vec{x}^h, \vec{\xi}^h] = [\vec{x},\vec{\xi}]^v.$$

Пусть $\left(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g,D\right)$ — Сасакиева структура с распределением нулевой кривизны на многообразии M. Почти контактная гиперкэлерова структура

$$\left(D, J_1, J_2, J_3, \vec{u} = \partial_n, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D}\right)$$

на распределении D многообразия M определяется посредством равенств

$$J_1\vec{x}^h = -(\varphi\vec{x})^h,\ J_1\vec{x}^v = (\varphi\vec{x})^v,\ J_1(\vec{u}) = \vec{0},\ J_2\vec{x}^h = \vec{x}^v,$$

$$J_2\vec{x}^h = -\vec{x}^h,\ J_2(\vec{u}) = \vec{0},\ J_3\vec{x}^h = (\varphi\vec{x})^v,\ J_3\vec{x}^v = (\varphi\vec{x})^h,$$

$$J_3(\vec{u}) = \vec{0},\ \tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^h) = \tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{y}^v) = g(\vec{x},\vec{y}),$$

$$\tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^v) = \tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{y}^h) = \tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{u}) = \tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{u}) = \vec{0},\ \vec{x},\vec{y} \in \Gamma(D).$$

Тензором Схоутена — Риччи назовем допустимое тензорное поле $r(\vec{y},\vec{z}) = tr\left(\vec{x} \to R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}\right),\ \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(D)$. Координатное представление тензора Схоутена — Риччи имеет вид: $r_{ab} = R^c_{cab}$.

Теорема 3. *Почти контактное гиперкэлерово многообразие является η-эйнштейновым многообразием.*

Доказательство. Проводя необходимые вычисления в адаптированных координатах, убедимся в справедливости равенства

$$\tilde{K}(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = R(\vec{x},\vec{y})\vec{z} + \eta(\vec{x})P(\vec{y},\vec{z}) - \eta(\vec{y})P(\vec{x},\vec{z}) +$$

$$+g(\vec{z},\varphi\vec{x})\varphi\vec{y} - g(\vec{z},\varphi\vec{y})\varphi\vec{x} - 2g(\vec{x},\varphi\vec{y})\varphi\vec{z} + \eta(\vec{z})\eta(\vec{y})\vec{x} -$$

$$-\eta(\vec{z})\eta(\vec{x})\vec{y} + \eta(\vec{x})g(\vec{y},\vec{z})\vec{\xi} - \eta(\vec{y})g(\vec{x},\vec{z})\vec{\xi}.$$

Здесь $\tilde{K}(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$ тензор кривизны связности Леви-Чивита. Используя последнее равенство и условие теоремы, получаем:

$$\tilde{K}_{abc}^{d} = \omega_{ca}\varphi_b^d - \omega_{cb}\varphi_a^d + 2\omega_{ba}\varphi_c^d,\ \ \tilde{K}_{nbc}^{n} = g_{cb}.$$

Далее, получаем: $\tilde{K}_{acb}^{a} = -3g_{cb} + g_{cb} = -2g_{cb}$. Аналогично, $\tilde{K}_{abn}^{a} = 0$ и $\tilde{K}_{ann}^{a} = 2m$, что и доказывает теорему.

Список литературы

1. *Букушева А. В., Галаев С. В., Иванченко И. П.* О почти контактных метрических структурах, определяемых связностью над распределением с финслеровой метрикой // Механика. Математика. 2011. №13. С. 10—14.

2. *Галаев С. В.* Гладкие распределения с допустимой гиперкомплексной псевдо-эрмитовой структурой // Вестник Башкирского университета. 2016. Т. 21, №3. С. 551—554.

3. *Галаев С. В.* Геометрическая интерпретация тензора кривизны Вагнера для случая многообразия с контактной метрической структурой // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57, №3. С. 632—640.

4. *Ganchev G., Mihova V., Gribachev K.* Almost contact manifolds with B-metric // Math. Balk. N. S. 1993, 7(3—4). P. 261—276.

5. *Obata M.* Affine connections in a quaternion manifold and transformations preserving the structure // J. Math. Soc. Japan. 1957. Vol. 9. P. 406—416.

6. *Soldatenkov A.* Holonomy of the Obata connection on SU (3) // Int. Math. Res. Not. 2012. № 15. P. 3483—3497.

A. Bukusheva, S. Galaev

Geometry of an almost contact hyper-Kähler manifolds

In the paper, the geometry of an almost contact hypercomplex and almost contact hyper-Kähler manifold is studied. The intrinsic connection of Obata, which preserves the almost contact hypercomplex structure, is determined. It is proved that an almost contact hyper-Kähler manifold is an η-Einstein manifold.

Key words: almost contact hyper-Kähler manifold, η-Einstein manifold.

УДК 514.76

А.И. Егоров
Пензенский государственный университет
gormj@mail.ru

Геометрическая интерпретация некоторых максимально-подвижных метрических пространств $\overset{o}{g}_{n,y}$ линейных элементов различных лакунарностей основного случая II

Работа является непосредственным продолжением исследований, начатых нами в статьях [1; 2], здесь используются все принятые в них обозначения и определения. Вводятся в рассмотрение пространства $\Pi_{n,y}$; $A^n(m; n-m)$, $K^n(m; n-m)$ индекса $(m; n-m)$.

***Ключевые слова**:* группа движений; пространства $A^n(m; n-m)$, $K^n(m; n-m)$ индекса $(m; n-m)$.